高等数学I

5学分、信息、统计外招

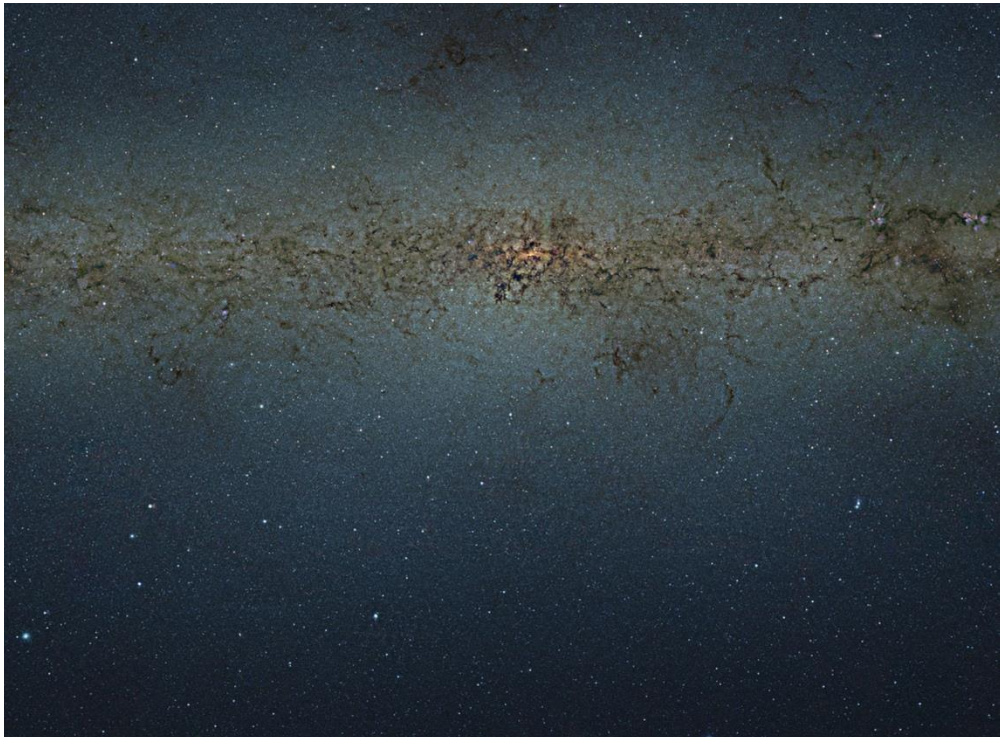
第一章 函数与极限

数学系王伟文

课程网页：https://wangyuanhao.github.io/advanced_mathematics/

无限的观念

这张银河系中心部分的惊人景象是由 ESO 位于智利的帕拉纳尔天文台的 VISTA 巡天望远镜拍摄到的。这张巨大的图片大小为 108 200 x 81 500 像素，包含近 90 亿像素。



https://www.eso.org/public/images/eso1242a/

To infinity and beyond...

吾生也有涯，而知也无涯。以有涯随无涯，殆已！

一尺之锤，日取其半，万世不竭

第二节 数列极限

数列 如果按照某一法则，对每个$n \in \mathbb{N}_+$，对应着一个确定的实数x_n，这些**实数x_n按照下标n从小到大排列得到的一个序列**

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫做数列，简记为数列$\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，第n项x_n叫做数列的一般项（或通项）

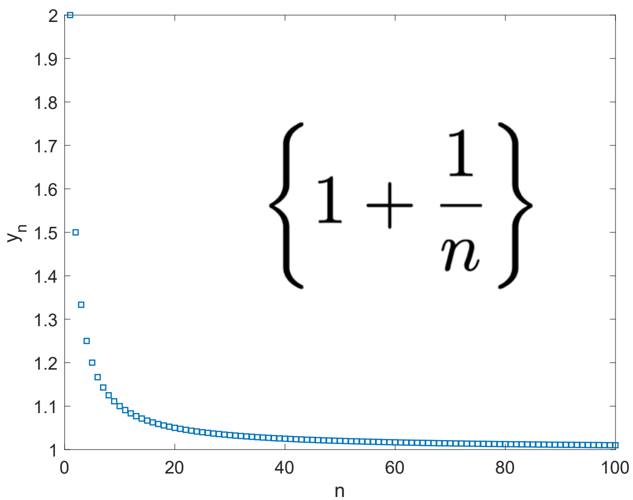
- **为数列$\{x_n\}$可视为自变量为正整数n的函数$x_n = f(n), n \in \mathbb{N}_+$，当自变量$n$依次取$1, 2, 3, \cdots$一切正整数时，对应的函数值就排成数列$\{x_n\}$.**

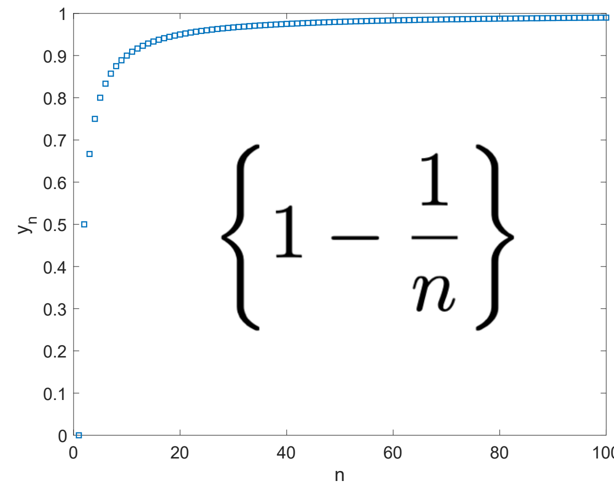
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$ $2, 4, 8, \cdots 2^n, \cdots$

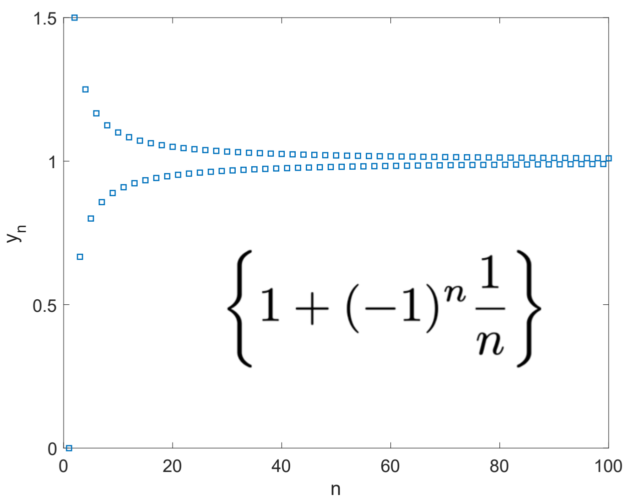
Q：当数列下标n无限增大时，对应的数列的项x_n能否无限接近某一个确定的数？

第二节 数列极限

数列中项随着n的变化情况







- **当n无限增大时，x_n是否无限接近于某一确定的数值？ 如果是，如何确定？**
- **“无限接近”意味着什么？如何用数学语言刻划它？**

第二节 数列极限

练习 考虑数列通项为$y_n = 1 + \frac{1}{n}$的数列, 求

- $|y_n - 1| < \frac{1}{10}$时n的取值范围
- $|y_n - 1| < \frac{1}{100}$时$n$的取值范围
- $|y_n - 1| < \frac{1}{1000}$时$n$的取值范围
- 给定任意的$\varepsilon > 0$, $|y_n - 1| < \varepsilon$时n的取值范围

正数$\boldsymbol{\varepsilon}$	数列下标	正整数$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{\|y_n - 1\| = \frac{1}{n} < \varepsilon}$
$\frac{1}{10}$	$n > 10$		$\|y_n - 1\| < \frac{1}{10}$
$\frac{1}{100}$	$n > 100$		$\|y_n - 1\| < \frac{1}{100}$
$\frac{1}{1000}$	$n > 1000$		$\|y_n - 1\| < \frac{1}{1000}$

第二节 数列极限

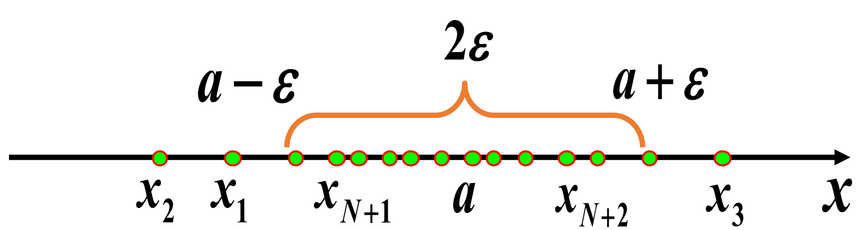
数列极限 设$\{x_n\}$为一数列, 如果存在常数a, 对于**任意给定的正数ε**, 总存在正整数N, 使得**当数列下标$n > N$时, 数列的项总满足不等式**

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则称常数a是数列$\{x_n\}$的**极限**, 或称**数列$\{x_n\}$收敛于a**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \text{或} \quad x_n \to a(n \to \infty)$$

- 如果不存在这样的常数a, 就说数列$\{x_n\}$没有极限, 或者说数列$\{x_n\}$是发散的, 习惯上也说为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在;
- "数列$\{x_n\}$的极限为a"的几何解释: 在数轴上, 至多有限个点落在区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外



第二节 数列极限

数列极限 设$\{x_n\}$为一数列, 如果存在常数a, 对于**任意给定的正数ε**, 总存在正整数N, 使得**当数列下标$n > N$时, 数列的项总满足不等式**

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则称常数a是数列$\{x_n\}$的**极限**, 或称**数列$\{x_n\}$收敛于a**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \to a(n \to \infty)$$

- ε的任意性表明ε可以任意地小, 从而刻画了x_n与a无限接近的含义;
- 正常数N的取值依赖于ε, 有时也记为$N(\varepsilon)$.

第二节 数列极限

数列极限 设$\{x_n\}$为一数列, 如果存在常数a, 对于**任意给定的正数**ε, 总存在正整数N, 使得**当数列下标**$n > N$**时, 数列的项总满足不等式**

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则称常数a是数列$\{x_n\}$的**极限**, 或称**数列**$\{x_n\}$**收敛于**a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } \quad x_n \to a(n \to \infty)$$

- **符号化简: "∀"表示任意, "∃"表示存在**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得当} n > N \text{时, 总有} |x_n - a| < \varepsilon$$

第二节 数列极限

证明数列

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

的极限是1

证明: $\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$, 给定任意$\varepsilon>0$, 要使得

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

即取$n>\frac{1}{\varepsilon}$.

亦即给定任意$\varepsilon>0$, 当$n>\frac{1}{\varepsilon}$时, $\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$

任取N为一大于$\frac{1}{\varepsilon}$的正整数, 当$n>N\,(>\frac{1}{\varepsilon})$时, $\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$

第二节 数列极限

定理1（极限的唯一性） 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一

定理2（收敛数列的有界性） 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界

定理3（收敛数列的保号性） 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$且$a > 0$（或$a < 0$），则存在正整数$n$，当$n > N$时，都有$x_n > 0$（或$x_n < 0$）

定理3的推论 如果数列$\{x_n\}$从某一项起$x_n \geq 0$(或$x_n \leq 0$)，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$a \geq 0$（或$a \leq 0$）

高等数学——数列极限

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

定理 2 (收敛数列的有界性)

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

证明.

因为数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证明.

因为数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 根据数列极限定义, 给定 $\epsilon = 1$, 存在正整数 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < 1,$$

证明.

因为数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 根据数列极限定义，给定 $\epsilon = 1$，存在正整数 $N \in \mathbb{N}_+$，使得当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < 1,$$

即当 $n > N$ 时 $x_n \in (a-1, a+1)$,

证明.

因为数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 根据数列极限定义, 给定 $\epsilon = 1$, 存在正整数 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < 1,$$

即当 $n > N$ 时 $x_n \in (a-1, a+1)$, 取 $M_1 = \max\{|a-1|, a+1\}$ 及

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, M_1\}$$

证明.

因为数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 根据数列极限定义，给定 $\epsilon = 1$，存在正整数 $N \in \mathbb{N}_+$，使得当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < 1,$$

即当 $n > N$ 时 $x_n \in (a-1, a+1)$，取 $M_1 = \max\{|a-1|, a+1\}$ 及

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, M_1\}$$

容易知道 $|x_n| \leq M$ 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 成立，故数列 $\{x_n\}$ 有界. □

定义 (子数列)

在数列 $\{x_n\}$ 中任意取无限多项并**保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序**, 这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列 (或子列).

定义 (子数列)

在数列 $\{x_n\}$ 中任意取无限多项并**保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序**, 这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列 (或子列).

- **数列 $\{x_n\}$ 的子列可以表示为 $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, 其中 $n_k \in \mathbb{N}_+$ 表示第 k 次从原数列中抽取项 x_{n_k}, 子列简记为 $\{x_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}_+$.**

定义 (子数列)

在数列 $\{x_n\}$ 中任意取无限多项并**保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序**, 这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列 (或子列).

- **数列 $\{x_n\}$ 的子列可以表示为 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$, 其中 $n_k \in \mathbb{N}_+$ 表示第 k 次从原数列中抽取项 x_{n_k}, 子列简记为 $\{x_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}_+$.**
- $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$.

定义 (子数列)

在数列 $\{x_n\}$ 中任意取无限多项并**保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序**, 这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列 (或子列).

- 数列 $\{x_n\}$ 的子列可以表示为 $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, 其中 $n_k \in \mathbb{N}_+$ 表示第 k 次从原数列中抽取项 x_{n_k}, 子列简记为 $\{x_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}_+$.
- $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$.
- 在子列 $\{x_{n_k}\}$ 中, x_{n_k} 为其第 k 项, 对应原数列的第 n_k 项.

定理 4 (收敛数列与其子列间的关系)

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 那么它的任一子列也收敛, 且极限也是 a.

例 4

证明数列 $x_n = (-1)^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 是发散的

证明.

例 4

证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}(n = 1,2,\ldots)$ 是发散的

证明.

- 取原数列奇数项下标, 构成子列 $\{(-1)^{2k-1+1}\} = \{1\}, k \in \mathbb{N}_+$, 该子列极限为 1.

例 4

证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}(n = 1,2,\ldots)$ 是发散的

证明.

- 取原数列奇数项下标，构成子列 $\{(-1)^{2k-1+1}\} = \{1\}, k \in \mathbb{N}_+$，该子列极限为 1.
- 取原数列偶数项下标，构成子列 $\{(-1)^{2k+1}\} = \{-1\}, k \in \mathbb{N}_+$，该子列极限为-1.

例 4

证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}(n = 1,2,\dots)$ 是发散的

证明.

- 取原数列奇数项下标，构成子列 $\{(-1)^{2k-1+1}\} = \{1\}, k \in \mathbb{N}_+$，该子列极限为 1.
- 取原数列偶数项下标，构成子列 $\{(-1)^{2k+1}\} = \{-1\}, k \in \mathbb{N}_+$，该子列极限为-1.
- 两子列极限不相同，由定理 4，该数列发散.

$\square$

作业

- 教材习题 1-2: 1(1)(4)(5)(7); 2; 3
- 例题 2, 教材 Page 22
- 抄写数列极限定义, 教材 Page 20